

## 虚点理論の新解釈、行列的な直観

定年退職して、久しぶり（約25年ぶり）に昔書いた数学小説をまた読み直してみた。自分で書いたくせに、難しくて訳が分からない所などを解き直してみたら間違っているところを発見したので、訂正させて頂きました。（素敵な直観 P42 (ア)） すみませんでした。

さて 虚点理論の外点写像について虚軸 ( $i$ ) への変換をもう少し考えてみました。

つまり  $A^2=K$  ( $K$ は外点行列) です。「素敵な直観 P22」では1次元の場合  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$  とい

う所でやめてしまったが、もうすでにご存じの通り「つり合い係数」 $\alpha, \beta$ において  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$

は  $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  と同じであり  $x = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\alpha - \beta} = \frac{-\alpha\alpha + \beta\beta}{-\alpha + \beta}$  となる。 ( $\because \alpha = \frac{1}{m}, \beta = \frac{1}{n}$ ) よって、

$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$  を与える行列は1次元の場合  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  であり、いま

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  となる行列  $A$  は  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$  の二つある。一般に  $n$ 次元においては「素敵な直

観 P43」に書いた通りである。そこで今回私は 1次元における虚軸 ( $i$ ) への変換を

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  を調べることにより、虚点の動きを可視化したいと思います。

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  で  $A$  を解くと  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  より

$z^n = -1$  の解は  $z = \cos\theta + i\sin\theta$  ただし  $\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2m\pi}{n}$  ( $m=0,1,2,3,\dots$ ) である。

( $\because z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = -1 \therefore r=1, n\theta = \pi + 2m\pi$  ( $m=0,1,2,3,\dots$ ))

いま、 $n=1,2,3,\dots$  のときの  $z$  を  $z_1, z_2, z_3, \dots$  とすると  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = \pm i$ ,

$z_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1$ ,  $z_4 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$  (複合任意),  $z_5 = -1$ ,

$\cos(\pm \frac{\pi}{5}) + i\sin(\pm \frac{\pi}{5}), \cos(\pm \frac{3\pi}{5}) + i\sin(\pm \frac{3\pi}{5})$  (複号同順)  $\dots$  となる。

例えば、2点  $A(-4), B(-1)$  を「2:1に分ける」外点は「つり合い係数1:2 ( $\because$ 最小公倍数2

より、または逆数を整数化した)」だから、以下の行列によってそれぞれ次の点に移る。

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(\cos\theta + i\sin\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2m\pi}{n} \quad (m=0,1,2,3,\dots)$$

$n=1$  のとき、 $(\alpha', \beta') = (1, -2)$  よって、外点  $Q(x)$  は  $x = \frac{1 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1)}{1 - 2} = 2$

$n=2$  のとき、 $(\alpha', \beta') = (1, \pm 2i)$   $Q(x)$  は  $x = \frac{1 \cdot (-4) \pm 2i \cdot (-1)}{1 \pm 2i} = \dots = \frac{-8 \pm 6i}{5}$

$n=3$  のとき、 $z_3 = -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  より  $(\alpha', \beta') = (1, -2)$  と  $(1, 1 \pm \sqrt{3}i)$

よって、 $Q(x)$  は  $x=2$  と  $x = \frac{1 \cdot (-4) + (1 \pm \sqrt{3}i) \cdot (-1)}{1 + 1 \pm \sqrt{3}i} = \dots = \frac{-13 \pm 3\sqrt{3}i}{7}$  となる。

$n=4,5,6,\dots$  以下同様である。実は、これらすべての外点  $Q(x)$  はある円周上に乗っている。

一般に、 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  で表される行列  $A$  によって虚軸上の外点  $Q(x)$  はこの例の場合、

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(\cos\theta + i\sin\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2m\pi}{n} \quad (m=0,1,2,3,\dots)$$

に従うから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \cdot (-4) + 2(\cos \frac{\pi + 2m\pi}{n} + i\sin \frac{\pi + 2m\pi}{n}) \cdot (-1)}{1 + 2(\cos \frac{\pi + 2m\pi}{n} + i\sin \frac{\pi + 2m\pi}{n})} = \dots = \frac{1 \cdot (-4) + 2(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot (-1)}{1 + 2(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{-4 - 2\cos\theta - 2i\sin\theta}{1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta} = \frac{(-4 - 2\cos\theta - 2i\sin\theta)(1 + 2\cos\theta - 2i\sin\theta)}{(1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta)(1 + 2\cos\theta - 2i\sin\theta)} = \dots = \frac{-8 - 10\cos\theta + 6i\sin\theta}{5 + 4\cos\theta} \\ &= \frac{-8 - 10\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} + \frac{6\sin\theta}{5 + 4\cos\theta}i \quad \text{である。} \end{aligned}$$

いま、複素平面上で  $a + bi = \frac{-8 - 10\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} + \frac{6\sin\theta}{5 + 4\cos\theta}i$  の存在場所は

$$\begin{aligned} (a,b) &= \left( \frac{-8 - 10\cos\theta}{5 + 4\cos\theta}, \frac{6\sin\theta}{5 + 4\cos\theta} \right) \quad \text{より} \quad a^2 + b^2 = \left( \frac{-8 - 10\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} \right)^2 + \left( \frac{6\sin\theta}{5 + 4\cos\theta} \right)^2 = \dots \\ &= \frac{64 + 160\cos\theta + 10^2\cos^2\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2} + \frac{36\sin^2\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2} = \frac{64 + 36 + 160\cos\theta + 64\cos^2\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2} = \frac{(10 + 8\cos\theta)^2}{(5 + 4\cos\theta)^2} = 4 \end{aligned}$$

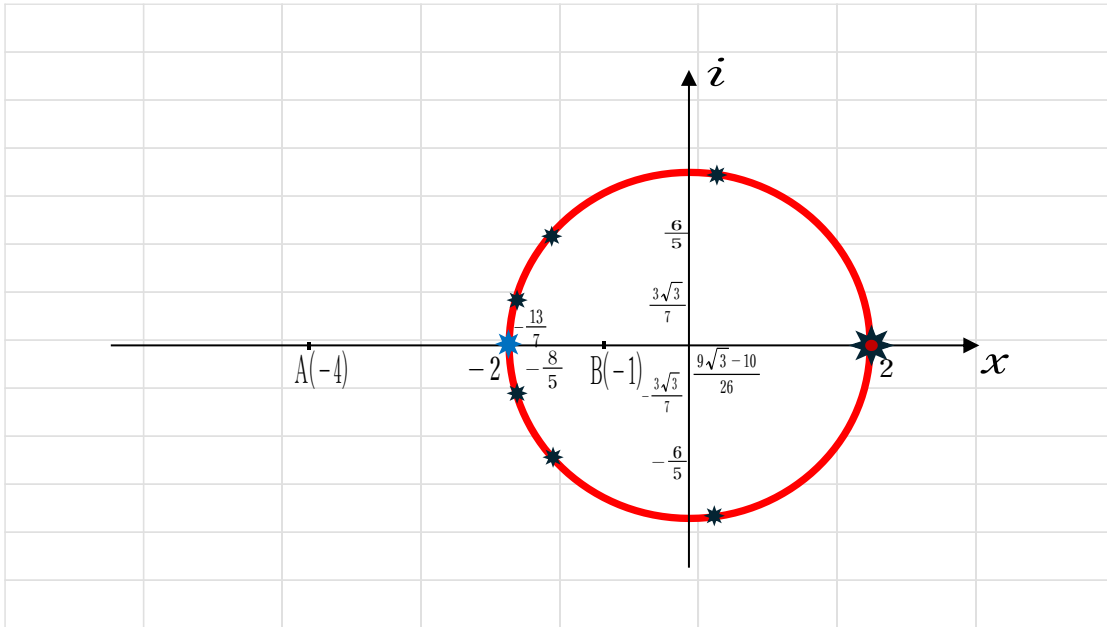
よって、 $a^2 + b^2 = 2^2$  の中心  $O(0,0)$ 、半径 2 の円周上に点在している。これは波動関数：

$\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$  の  $r=2$  の場合に似ているように思えてならない。 $n=2$  の小さな値では

分からなかったが、 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  や  $A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  など

一般に  $A^n = K$  ( $K$  は虚点理論によって実空間に移動する外点行列) は  $n \rightarrow \infty$  を可視化しないと質点の内点と外点、つまり物理的には重心と外点の関係が <sup>み</sup>観えてこないと思う。

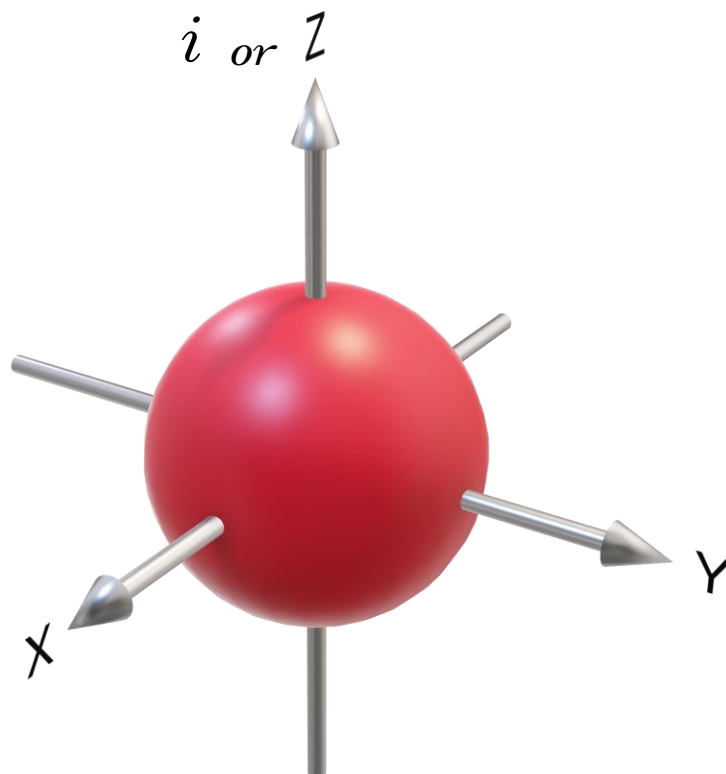
可視化したイメージの図 (複素平面)・・・重心(内分点)  $\star$  と外点  $\star$



2次元以上は重心(内分点)が内部にある。以下も、あくまで小説である。

ただし、2次元は2倍に拡散し続け、4次元以上は収縮していく。3次元のみが安定している。

(∵「素敵な直観」第3章「虚点理論」より)



ここまでの外点写像を混乱の無いように二つにまとめておきたい。

一つは「素敵な直観」p20 までの『点の移動』である。つまり、 $(a,b,c,\dots) \Rightarrow (a',b',c',\dots)$  は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+c+\dots \\ a-b+c+\dots \\ a+b-c+\dots \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{分母} = 1, 2, 3, \dots$$

という、ベクトルである。

また、二つ目は「素敵な直観」p21 からの「つり合い係数」の写像である。

つまり、 $(\alpha,\beta,\gamma,\dots) \Rightarrow (\alpha',\beta',\gamma',\dots)$  は以下のような性質を持つ。

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha+\beta+\gamma+\dots \\ \alpha-\beta+\gamma+\dots \\ \alpha+\beta-\gamma+\dots \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S-2\alpha \\ S-2\beta \\ S-2\gamma \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{ただし、}$$

$S = \alpha + \beta + \gamma + \dots$

この二つの性質をわかりやすいイメージとして、「素敵な直観」p43 の表中に

$(\alpha,\beta,\gamma,\dots) \Rightarrow (-\alpha, \beta, \gamma,\dots), (\alpha, -\beta, \gamma,\dots), (\alpha, \beta, -\gamma,\dots), \dots$  と表現してしまった。

『点の移動』はあくまでも外点写像の定義 (p14) に従うものであり、「つり合い係数」は移動した点の内点 (重心) からの距離 (点の質量の逆数) の概念として生じた興味ある副産物となったのである。たとえ小説でもいいから「素敵な直観」p39 に示した通り、超マクロな質点の移動と同様に超ミクロな質点の移動も是非とも直観したい！先に述べた  $A^n = K$  (K は虚点理論によって実空間に移動する外点行列) の  $n \rightarrow \infty$  を可視化しないと、やはり質点の内点と外点、物理的な重心と外点の関係が観えてこない。今後の課題となる。



2024.6.29 自宅にて

## 続 虚点理論の新解釈、行列的な直観

前回の課題を少し検討してみた。

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{や} \quad A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \dots \text{など}$$

一般に  $A^n = K$  ( $K$  は虚点理論によって実空間に移動する外点行列) は  $n \rightarrow \infty$  を可視化しないと質点の内点と外点、つまり物理的な重心と外点の関係が観えてこない! という件である。

1次元の  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  については  $n \rightarrow \infty$  の可視化が前回終わっている。しかし、2次元の

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{などについては想像の直感でしかなかった。まだ正しい直観ではない!}$$

そこで一般に

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+c+\dots \\ a-b+c+\dots \\ a+b-c+\dots \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{分母} = 1, 2, 3, \dots$$

という、ベクトルによって

外点写像がどの様に実空間に移動するのか今回あらためて考えてみた (虚軸 ( $i$ ) への変換)。

やはり  $A^2 = K$  ( $K$  は外点行列) です。例えば、2次元平面では

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{より、3点 } A(1,0), B(0,2), C(-3,0) \quad \text{とすると実空間への移動は}$$

$A'(-4,2), B'(-2,-2), C'(4,2)$  であるが

$$A^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

いま  $\dots$  を取り上げて考えると

虚軸 ( $i$ ) への変換は 
$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
 である。

よって、3点 A,B,C の  $x$  座標は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \pm 5\sqrt{2}i \\ -2 \pm 2\sqrt{2}i \\ -2 \mp 7\sqrt{2}i \end{pmatrix} \text{ に移動し}$$

$x i$  平面に投影される点の座標は  $A_{xi}(-\frac{2}{3}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{3})$ ,  $B_{xi}(-\frac{2}{3}, \pm \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ,  $C_{xi}(-\frac{2}{3}, \mp \frac{7\sqrt{2}}{3})$

となる。よって点 A の  $x$  座標の虚軸を通過する外点移動  $A \rightarrow A_{xi} \rightarrow A'$  は

$A(1,0) \rightarrow A_{xi}(-\frac{2}{3}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{3}) \rightarrow A'(-4,0)$  である。ただし、 $i$  座標の 0 は実在する点を表す。

この点の移動は  $(x + \frac{3}{2})^2 + z^2 = (\frac{5}{2})^2$  を満たし、中心  $(-\frac{3}{2}, 0)$ , 半径  $\frac{5}{2}$  の円周上にある。

$A(1,0)$  と  $A'(-4,0)$  はすぐに分かるが、例えば  $A_{xi}(-\frac{2}{3}, \pm \frac{5\sqrt{2}}{3})$  の場合

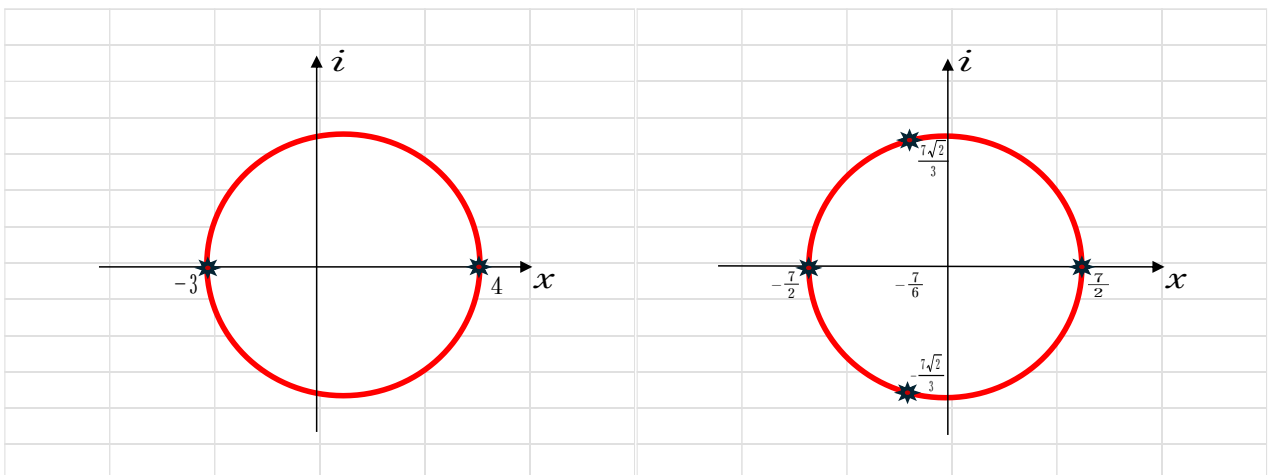
$$(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2})^2 + (\pm \frac{5\sqrt{2}}{3})^2 = (-\frac{4+9}{6})^2 + \frac{25 \times 2}{9} = \frac{25 + 200}{36} = (\frac{15}{6})^2 = (\frac{5}{2})^2$$

となる。同様に点  $B \rightarrow B_{xi} \rightarrow B'$ , 点  $C \rightarrow C_{xi} \rightarrow C'$  も成り立つことが分かった。

特に点 C は大きな値で怪しかったので、次のように楕円をイメージして確かめた。

$x$  座標の虚軸を通過する外点移動は  $C(-3,0) \rightarrow C_{xi}(-\frac{2}{3}, \mp \frac{7\sqrt{2}}{3}) \rightarrow C'(4,0)$

考えやすいように  $x$  軸方向に  $-\frac{1}{2}$  だけ平行移動して、



$$C(-3 - \frac{1}{2}, 0) \rightarrow C_{xi}(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}, \mp \frac{7\sqrt{2}}{3}) \rightarrow C'(4 - \frac{1}{2}, 0) \quad \text{つまり}$$

$$C(-\frac{7}{2}, 0) \rightarrow C_{xi}(-\frac{7}{6}, \mp \frac{7\sqrt{2}}{3}) \rightarrow C'(\frac{7}{2}, 0) \quad \text{として} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{を確かめる。}$$

$C(-\frac{7}{2}, 0)$  と  $C'(\frac{7}{2}, 0)$  はすぐに分かるが、 $C_{xi}(-\frac{7}{6}, \mp \frac{7\sqrt{2}}{3})$  は大きな値で怪しい。

$$\frac{(-\frac{7}{6})^2}{(\frac{7}{2})^2} + \frac{(\mp \frac{7\sqrt{2}}{3})^2}{b^2} = 1$$

代入して、

より

$$\frac{(\mp \frac{7\sqrt{2}}{3})^2}{b^2} = 1 - \frac{7^2}{6^2} \times \frac{2^2}{7^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

よって、 $b^2 = \frac{9}{8} \times (\mp \frac{7\sqrt{2}}{3})^2 = \frac{9}{8} \times \frac{49 \times 2}{9} = \frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2$  となった。

やはり、楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  の形ではなく円周上の点であることが分かった。

これらも波動関数： $\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$  に似ているように思えてならない。

・・・そもそも  $A^2$  や  $A \times A \times \dots \times A = A^n$  などは積だから回転するのは当たり前。

だからこそ複素平面は回転と原点からの距離を変数に持つ極形式がベストなのである。・・・

$y$  座標の虚軸を通過する外点移動についても  $x$  座標の移動と同様に

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i \\ 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \mp \sqrt{2}i & 1 \pm 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \mp 2\sqrt{2}i \\ 2 \pm 4\sqrt{2}i \\ 2 \mp 2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \quad \text{より円周上を動いた。}$$

一般に証明はできていないが、あらゆる点であっても同様であろう。**2次元までの可視化成功。**

また、3次元以上では  $n \rightarrow \infty$  の可視化が最も難しいが、1次元や2次元と同様に複素空間では、円周（球体）上を動かだろうと確信する。

・・・ 考察はまだ 続く ・・・

2024.7.13 自宅にて

## 続々 虚点理論の新解釈、行列的な直観

3次元以上では  $n \rightarrow \infty$  の可視化が最も難しいが、1次元や2次元と同様に複素空間では、円周(球体)上を動かさうと確信する。 → 検討してみました!

結果は「なんと!やはり円周(球体)軌道上」でした。以下、具体例で示します。

一般に3次元空間で4点が外点写像した時、外点写像の定義(虚点理論 p14)により

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+c+d \\ a-b+c+d \\ a+b-c+d \\ a+b+c-d \end{pmatrix} \quad \text{分母=2 という、ベクトルによって 移動する。}$$

$$A^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \right)^2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

より、いま

$$A = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix} \quad \text{を取り上げて考えると}$$

虚軸 ( $i$ ) への変換は

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{である。}$$

よって、4点  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,-1,0)$ ,  $C(2,3,1)$ ,  $D(-3,-2,-1)$  とすると 実空間への移動は重心  $G(0,0,0)$  に対して、外点は  $A'(-1,0,0)$ ,  $B'(0,1,0)$ ,  $C'(-2,-3,-1)$ ,  $D'(3,2,1)$  となるが、4点A,B,C,Dの虚軸 ( $i$ ) への変換は次のようになる。

$x_i$  座標への投影は:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ \pm 2i \\ \mp 3i \end{pmatrix}$$



$yi$  座標への投影は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp i \\ \pm 3i \\ \mp 2i \end{pmatrix}$$

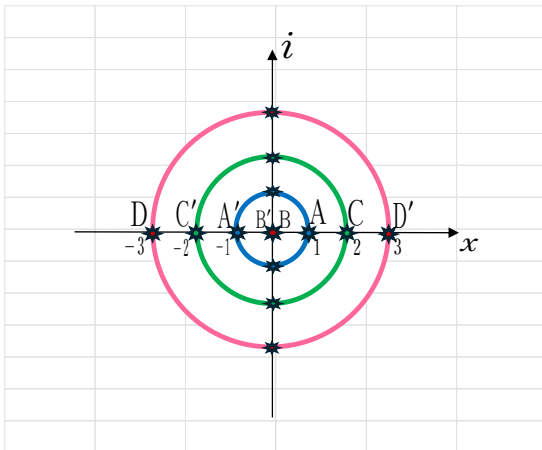
$zi$  座標への投影は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i \\ \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \mp \sqrt{2}i & \sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm i \\ \mp i \end{pmatrix}$$

に移動し

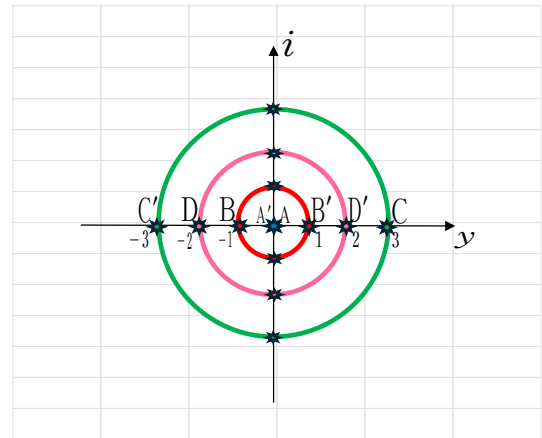
$xi$  平面に投影される4点の軌跡は：

- A(1,0) → A<sub>xi</sub>(0, ±1) → A'(-1,0)
- B(0,0) → B<sub>xi</sub>(0,0) → B'(0,0)
- C(2,0) → C<sub>xi</sub>(0, ±2) → C'(-2,0)
- D(-3,0) → D<sub>xi</sub>(0, ±3) → D'(3,0)



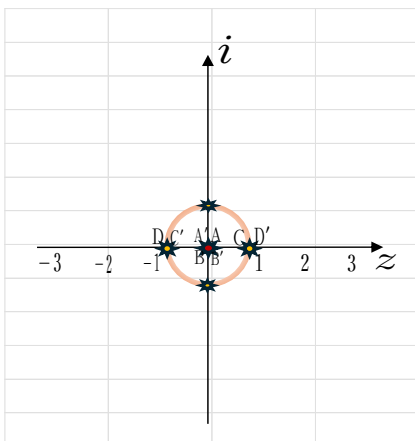
$yi$  平面に投影される4点の軌跡は：

- A(0,0) → A<sub>yi</sub>(0,0) → A'(0,0)
- B(-1,0) → B<sub>yi</sub>(0, ±1) → B'(1,0)
- C(3,0) → C<sub>yi</sub>(0, ±3) → C'(-3,0)
- D(-2,0) → D<sub>yi</sub>(0, ±2) → D'(2,0)



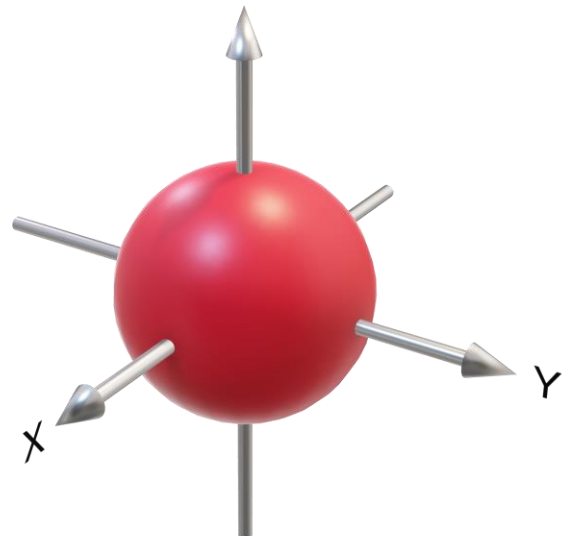
$zi$  平面に投影される4点の軌跡は：

- A(0,0) → A<sub>zi</sub>(0,0) → A'(0,0)
- B(0,0) → B<sub>zi</sub>(0,0) → B'(0,0)
- C(1,0) → C<sub>zi</sub>(0, ±1) → C'(-1,0)
- D(-1,0) → D<sub>zi</sub>(0, ±1) → D'(1,0)



である。

$i$  or  $z$



これらの点の移動はすべて円運動であり  $r = 1, 2, 3$  の 波動関数:  $\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$  に似ている。やはり3次元空間では、完全に裏返し写像であり重心も外点も安定した位置に存在したままである。また、「積=回転」の原理の為どの次元でも虚軸を通過する際は必ず円運動にならざるを得ない。

… 3次元までの可視化成功。

次回、4次元以上の可視化も挑戦していきたい。…予想どおり収縮となるか?! 続く …

2024.7.20 自宅にて

## 続々 虚点理論の新解釈、行列的な直観

更に4次元以上の空間における外点写像を具体的に考えて、過去の直観が正しいか検証してみました。複素空間では、今まで通り円周（球体）上を動かさろうと予想していましたが、結果は「なんと！収縮していく軌道が円周（球体）じゃない！」でした。以下、具体例で示します。

一般に4次元空間で5点が外点写像した時、外点写像の定義（虚点理論 p14~p17）により

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b+c+d+e \\ a-b+c+d+e \\ a+b-c+d+e \\ a+b+c-d+e \\ a+b+c+d-e \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{分母} = 3 \text{ という、} \\ \text{ベクトルによって移動する。} \end{array}$$

$$A^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} \right)^2 \begin{pmatrix} m & n & n & n & n \\ n & m & n & n & n \\ n & n & m & n & n \\ n & n & n & m & n \\ n & n & n & n & m \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし、 $m = \sqrt{3} \pm 4\sqrt{2}i$  ,  $n = \sqrt{3} \mp \sqrt{2}i$  より、いま

$$A = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} m & n & n & n & n \\ n & m & n & n & n \\ n & n & m & n & n \\ n & n & n & m & n \\ n & n & n & n & m \end{pmatrix} \quad \text{を取り上げて考えると}$$

虚軸 ( $i$ ) への変換は



また、5点  $A(1,0,0,0)$ ,  $B(0,-1,0,0)$ ,  $C(0,0,2,0)$ ,  $D(-1,0,-1,2)$ ,  $E(0,1,-1,-2)$  の実在する各座標への外点はそれぞれ次のようになる。

$\mathcal{X}$  座標への移動は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{Y}$  座標への移動は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{Z}$  座標への移動は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\delta$  座標への移動は：

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

つまり、重心との関係において従属しない（一意的に）独立な質点が5個以上存在すると、3次元を超えた4次元以上の空間であり、結果として外点写像は同一円周上には存在できなかった。こ

の例の場合、虚軸への半径が  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  倍となり、実軸へは  $\frac{2}{3}$  倍となった。

まとめると次のようになる。

$$\begin{array}{l}
 \text{極座標 } \alpha + \beta i \\
 \implies (\alpha, \beta) \\
 A(1,0,0,0) \rightarrow \begin{cases} A_{xi}(0, \pm \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ A_{yi}(0,0) \\ A_{zi}(0,0) \\ A_{\delta i}(0,0) \end{cases} \rightarrow A'(-\frac{2}{3}, 0, 0, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{極座標 } \alpha + \beta i \\
 \implies (\alpha, \beta) \\
 B(0, -1, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} B_{xi}(0,0) \\ B_{yi}(0, \mp \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ B_{zi}(0,0) \\ B_{\delta i}(0,0) \end{cases} \rightarrow B'(0, \frac{2}{3}, 0, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{極座標 } \alpha + \beta i \\
 \implies (\alpha, \beta) \\
 C(0,0,2,0) \rightarrow \begin{cases} C_{xi}(0,0) \\ C_{yi}(0,0) \\ C_{zi}(0, \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}) \\ C_{\delta i}(0,0) \end{cases} \rightarrow C'(0,0, -\frac{4}{3}, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{極座標 } \alpha + \beta i \\
 \implies (\alpha, \beta) \\
 D(-1, 0, -1, 2) \rightarrow \begin{cases} D_{xi}(0, \mp \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ D_{yi}(0,0) \\ D_{zi}(0, \mp \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ D_{\delta i}(0, \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}) \end{cases} \rightarrow D'(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{極座標 } \alpha + \beta i \\
 \implies (\alpha, \beta) \\
 E(0,1, -1, -2) \rightarrow \begin{cases} E_{xi}(0,0) \\ E_{yi}(0, \pm \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ E_{zi}(0, \mp \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ E_{\delta i}(0, \mp 2\sqrt{\frac{2}{3}}) \end{cases} \rightarrow E'(0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})
 \end{array}$$

行列による写像を繰り返すことによって「積＝回転」の原理のもと今までの3次元空間では複素空間上の移動も円周（球体）上を動いていたが、4次元空間では「なんと！収縮していく軌道が円周（球体）じゃない！」つまり、円の軌道上に少なくとも3点がのらないのである。しかし、極形式には素晴らしい関数が存在している。つまりもう、この写像を関数で表現するにはまさに、

波動関数： $\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$  の  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  ,  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$  の時であり、虚軸上の関数値となり

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i(\pm \frac{\pi}{2})} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos(\pm \frac{\pi}{2}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{2})) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} i \text{ となる。}$$

また、 $\Psi^2 = re^{i\theta} \times re^{i\theta} = r^2 e^{i(2\theta)}$  より、 $2\theta = \pm \pi$  は実軸上の関数値となり

$$\Psi_1^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}^2 e^{i(\pm \pi)} = \frac{2}{3} (\cos(\pm \pi) + i \sin(\pm \pi)) = -\frac{2}{3} \text{ となる。}$$

つまり、質点は一般に円や球体上にはなく（アポロニウスの円ではなかった）、 $\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$ の形で点の動きを表現するしか方法がないことが分かってしまった。

1次元から3次元までは  $r = \text{一定}$  でよかった（成り立つ）が、4次元以上の外点写像が収縮する場合などは一般的に  $\Psi = re^{i\theta} = re^{i(kx - \omega t)}$  で表現する。それによる関数値（係数）も「虚点理論 p17, p18」の通り  $-\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots$  と反対側に収縮していこう。

いずれにせよ、4次元以上の外点写像が収縮する場合なども、波動関数によって「虚点理論の外点写像」が具体的にどこの点<sup>み</sup>なのかを観ることができた。……4次元以上の可視化成功。

……「虚点理論の直観！」が正しい事が証明できた気がする。……

……疲れた……



2024.7.21 自宅にて