多次元空間における（内外）分点公式

一般に内分と外分は結果的に符号(＋—)によって生ずるものであり、

n個の点によるその内分点と外分点は次の公式によって表されるものである。

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{a}\vec{a}+\frac{1}{b}\vec{b}+\frac{1}{c}\vec{c}+\cdots\cdots+\frac{1}{\xi}\vec{\xi}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\cdots+\frac{1}{\xi}}$$

２点の場合

例　「２点ＡＢを３：２に分ける点」

内分：

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}{\frac{2+3}{6}}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{2+3}=\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{3+2}$$

外分：「２点ＡＢを３：－２に分ける点」

（これは、「２点ＡＢを－３：２に分ける点」と同じ。）

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}{\frac{2-3}{6}}=\frac{2\vec{a}-3\vec{b}}{2-3}=\frac{-2\vec{a}+3\vec{b}}{3-2}$$

３点の場合

例　「３点ＡＢＣを４：１：６に分ける点」

（チェバの定理による重み分け）

内分：

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{3+12+2}{12}}$$

$$=\frac{3\vec{a}+12\vec{b}+2\vec{c}}{3+12+2}=\frac{3\vec{a}+12\vec{b}+2\vec{c}}{17}$$

外分：　メネラウスの定理による重み分け

外分①：「３点ＡＢＣを－４：１：６に分ける点」

$$\vec{x}=\frac{-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}}=\frac{-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{-3+12+2}{12}}$$

$$=\frac{-3\vec{a}+12\vec{b}+2\vec{c}}{-3+12+2}=\frac{-3\vec{a}+12\vec{b}+2\vec{c}}{11}$$

外分②：「３点ＡＢＣを４：－１：６に分ける点」

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{1}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{3-12+2}{12}}$$

$$=\frac{3\vec{a}-12\vec{b}+2\vec{c}}{3-12+2}=\frac{3\vec{a}-12\vec{b}+2\vec{c}}{-7}$$

外分③：「３点ＡＢＣを４：１：－６に分ける点」

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{1}-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{1}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{3+12-2}{12}}$$

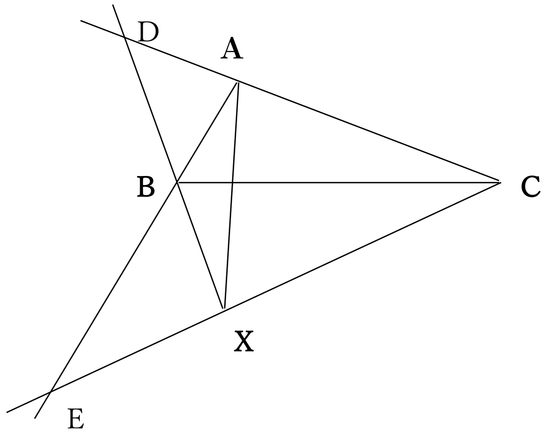
$$=\frac{3\vec{a}+12\vec{b}-2\vec{c}}{3+12-2}=\frac{3\vec{a}+12\vec{b}-2\vec{c}}{13}$$

以下、ｎ点の場合も同様となる。

（※別冊：分点とは何か？で、証明。）　→　**参考**

参考（高校数学⇒大学受験問題）

問１　図のように△ＡＢＣの外部に点Ｘがあり、線分ＡＸが線分ＢＣを１：３に内分し、直線ＢＸと直線ＡＣの交点Ｄが線分ＡＣを２：５に外分するとき、点Ｘの位置を３点A,B,Cの位置ベクトル$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。



解）メネラウスの定理より

$$\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\times\gamma=1 \quad \therefore\ \gamma=\frac{6}{5}$$

よって、点 E は線分 AB を６ ：－５に分ける点である。

また、これは線分 AB を－６ ：５に分ける点と同じ。

よって、外分点の負の領域（別冊：ｐ９）より

「点Ｘは△ＡＢＣを－６：５：１５に分ける点である。」

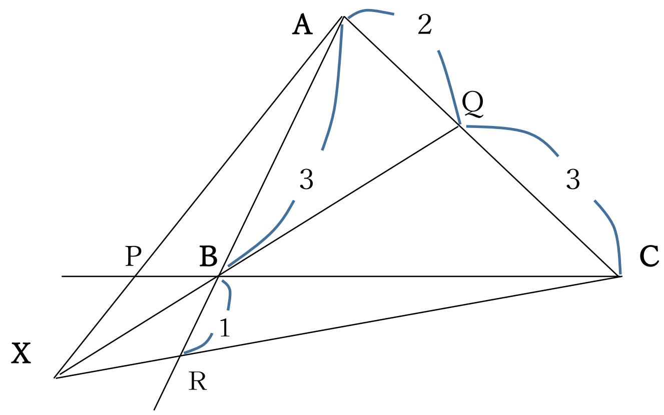
よって、

$$\vec{x}=\frac{-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{15}\vec{c}}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}}=\frac{-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{15}\vec{c}}{\frac{-5+6+2}{30}}$$

$$=\frac{-5\vec{a}+6\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$ となる。

従来の２変数s,t を使って求めるよりよっぽど早い。

問２　図で、点Ｘの位置をベクトル$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。



解）メネラウスの定理より

$$\alpha\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{1}=1 \quad \therefore\ \alpha=\frac{1}{6}$$

点Ｐは線分 BC を－１ ：６に分ける点である。

よって、「点Ｘは△ＡＢＣを４ ：－１ ：６に分ける。」

よって、

$$\vec{x}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{1}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{1}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}{\frac{3-12+2}{12}}$$

$$=\frac{3\vec{a}-12\vec{b}+2\vec{c}}{-7}$$ となる。

文責：國吉敏

※「分点とは何か？」は別冊：数学小説『2000 年に間に合った素敵な直観』の中で紹介しています。

⇒　「目次の一覧」ページの「素敵な直観」です。