美しさには理由がある。パート２（※数学小説「第１章４節」の続編）

点と平面の距離の公式については、$\mathrm{D}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で普段数学に親しんでいる人にとっては、もっとも感動的であると思われる。

『つまり点と平面の距離は、ある平面と定点を通る平行な平面との幅を法線ベクトル（垂直）の大きさ（単位）で割って求まる。』という事である。

この距離の公式はｎ次元ベクトル空間でも当然成り立ち、$\mathrm{D}=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+\cdots+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\cdots}}$ で表せる。

証）　ある平面　　　　　：　$ax+by+cz+\cdots+\delta=0$

定点を通る平行な平面：　$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)+\cdots=0$ 　より

この２つの平面の幅（関数）は、

$$\begin{array}{rrrrrr} & ax & +by & +cz & +\cdots+\delta & =0 \\ -\ ) & a(x-x_0) & +b(y-y_0) & +c(z-z_0) & +\ \cdots & =0 \\ \hline & ax_0 & +by_0 & +cz_0 & +\cdots+\delta & =0 \end{array}$$

となる。

この左辺はすでに定数であり、絶対値が幅となる。

つまり、幅は $|ax_0+by_0+cz_0+\cdots+\delta|$ で、これを基準となる単位で割る。なぜなら、例えば $2x+3y+4=0$ は、$4x+6y+8=0$ と同じであり、正確な大きさは垂直な法線ベクトルを単位としなくてはならない。したがって、法線ベクトル $(a,b,c,\cdots)$ の大きさで割ると

$$\mathrm{D}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+\cdots+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\cdots}}$$

が得られるのである。　//

この「点と平面の距離」の直観は、別に示した「分点公式」の直観と非常によく似ていると思われる。

やはり美しいものには必ず何か理由があるものと確信する。次に具体的な証明を３次元空間で示したい。

定点(x_0, y_0, z_0)と平面$ax+by+cz+d=0$の距離の公式を示す。

証）

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 & \cdots\cdot \text{ある平面} \\ \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}=t & \cdots \text{定点を通る平面に垂直な直線} \end{cases}$$

を解くと

平面上に、定点と**垂直な位置にある共有点が求まる。**

$x=at+x_0, y=bt+y_0, z=ct+z_0$ を平面に代入して、

$a(at+x_0)+b(bt+y_0)+c(ct+z_0)+d=0$ より、

$-t(a^2+b^2+c^2)=ax_0+by_0+cz_0+d$ …媒介変数 t による**幅（関数）**となる。

$$t=\frac{-(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}$$

により、共有点は次のようになる。

$$\left(\frac{-a(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}+x_0, \frac{-b(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}+y_0, \frac{-c(ax_0+by_0+cz_0+d)}{a^2+b^2+c^2}+z_0\right)$$

よって、2点間の距離の公式から、定点とある平面の距離は

$$\mathrm{D}^2=\frac{a^2(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{b^2(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{c^2(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$=\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$$

により

$$\mathrm{D}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

となる。 //

先に述べたとおり、これは一般にn次元においても同様に証明ができる。

よって、一般に

$$\mathrm{D}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+\cdots+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\cdots}}$$

が成り立つ。