

美しさには理由がある。(フィボナッチ数列「一般項の解説」)

前ページの一般項 a_n を確認します。

$$\begin{cases} a_1=1, a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

を示す。

証) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より 特性方程式: $x^2=x+1$ を解くと

$$x^2-x-1=0 \text{ より } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ である。いま、 } \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ と置く}$$

よって、 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 及び $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ が成り立ち

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)=\beta^2(a_n-\alpha a_{n-1})=\beta^3(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})=\dots=\beta^n(a_2-\alpha a_1)=\beta^{n+1}$$

また、

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)=\alpha^2(a_n-\beta a_{n-1})=\alpha^3(a_{n-1}-\beta a_{n-2})=\dots=\alpha^n(a_2-\beta a_1)=\alpha^{n+1} \text{ となる。}$$

$$\left(\because a_2-\alpha a_1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\beta, \quad a_2-\beta a_1=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\alpha \right)$$

よって、辺々の引き算より、

$$(\beta-\alpha)a_{n+1}=\beta^{n+1}-\alpha^{n+1} \quad \therefore a_{n+1}=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}) \quad \therefore a_n=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)$$

$$\text{いま、 } \beta-\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5} \text{ より、}$$

$$\text{漸化式 } \begin{cases} a_1=1, a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

が示された。 //

また、隣接 2 項間の比の値の極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})}{\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta^n-\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta-\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n} = \beta$$

となる。